Региональный этап XVIII республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М. Эрдниева в 2025-2026 учебном году

Критерии оценивания

Олимпиадные задания являются творческими и допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

Каждая задача оценивается **целым числом** баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущенные случаи, не влияющие на логику рассуждений.
4-3	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. В том случае, когда решение делится на две равноценные части – решение одной из частей.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.
0	При обоснованных подозрениях на списывание участником из любого источника (Интернет, учебное пособие, ключи олимпиады и т.д.) член жюри имеет право указать на такие фрагменты с помощью **восклицательных знаков** на полях.

Олимпиадная работа содержит 5 олимпиадных заданий разной сложности. Важно отметить, что любое правильное (верное) решение задания оценивается в 7 баллов.

Максимальное количество набранных баллов – 35 баллов.

При оценивании олимпиадного задания на составление и решение обратной задачи необходимо учитывать наличие в записи **текста обратной задачи** и оценивать верное решение прямой задачи в 4 балла, составление текста обратной задачи – 1 балл, верное решение обратной задачи – 2 балла.

Жюри проводит проверку решений участников на схожесть (идентичность) и выносит предложения об аннулировании результатов участников, если их решения заданий **одинаковые.**

Помимо этого, жюри муниципального этапа олимпиады должны помнить о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. **Недопустим**о снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

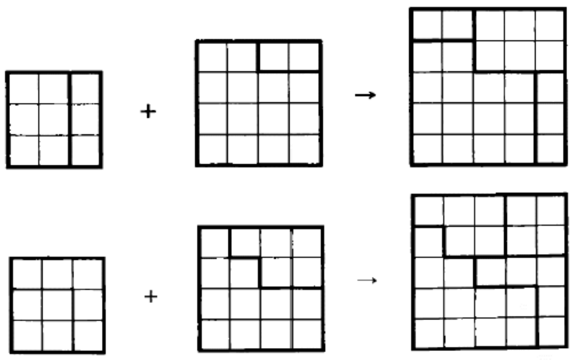
б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; **недопустимо** снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются **«за старание участника»,** в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

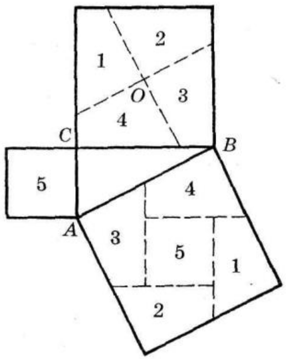
4 класс

1. **Ответ:** могут быть разные варианты решений.
   Решение: например, 12×34×5-6-7+8+9=2026
2. **Ответ: 2 часа.** Решение:
   240:3=80(км/ч) скорость первой машины
   240:6=40(км/ч) скорость второй машины
   40+80=120(км/ч) общая скорость
   240:120=2(ч) время встречи
3. **Ответ: 78 кг.** Решение:
   1) 46 + 30 = 76 (кг) - карпов и сазанов;
   2) 90 • 2 = 180 (кг) - рыбы было всего;
   3) 180 - 76 = 104 (кг) - судаков и лещей;
   4) 1 + 3 = 4 (части) - судаков и лещей;
   5) 104:4 = 26 (кг) - лещей;
   6) 26 • 3 = 78 (кг) - судаков.
4. Ответ: 1 час. Решение: Пусть каждому из них нужно сделать по 36 деталей. Тогда первый мастер за 1 час делает 6 деталей, второй 12 деталей, третий-18 деталей. Вместе за 1 час они сделают 36 деталей. Тогда работая вместе 36:36=1 час.
5. **Ответ:** возможны различные варианты решений
   Решение: например

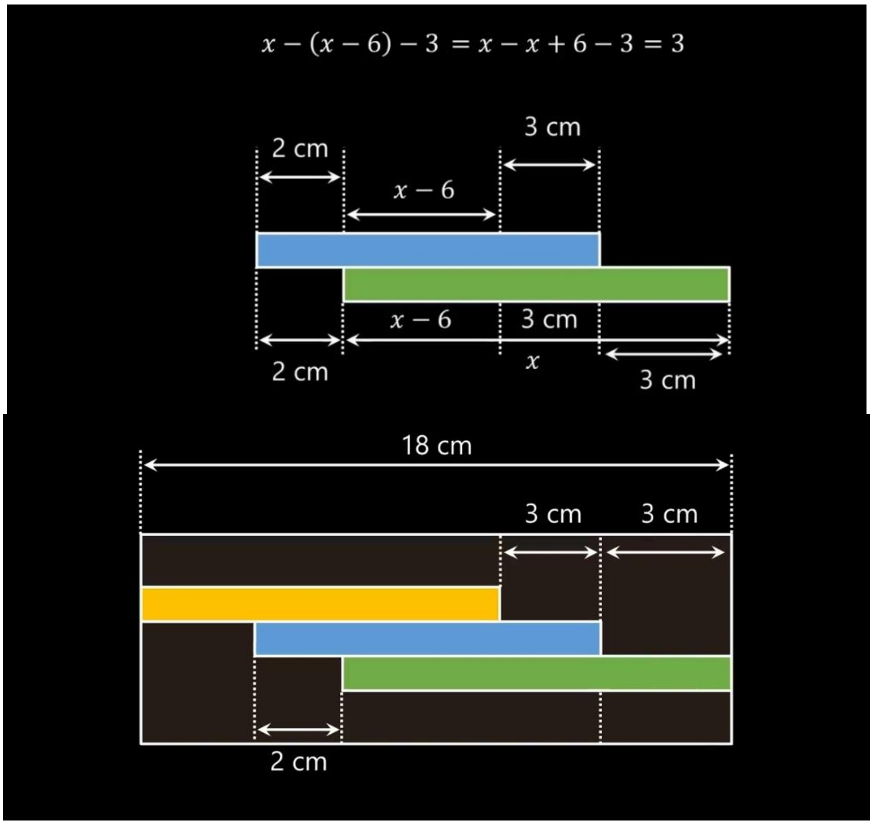


5 класс

1. **Ответ:** могут быть разные варианты решений. Решение: 12×34×5-6-7+8+9=2026
2. **Ответ: 35 суток.** Решение: Допустим из Цаган-Амана одновременно вышли плот и катер. Относительно плота катер двигается со своей собственной скоростью, раз он пять суток отплывал от плота, то за пять суток к ним вернётся. Следовательно, за 10 суток плот проплывают столько, сколько катер за двое суток проходит против течения. Катер против течения идёт 7 суток, поэтому плот будет в пути 35 суток.
3. **Ответ:** 12 ойратов и 3 лошади. Всего в караване было 15. Если бы все они были ойратами, то у них было бы $15 \cdot 2 = 30$ ног, но на самом деле ног на 6 больше, а значит, в караване были $6 : (4 - 2) = 3$ лошади и $15 - 3 = 12$ ойратов.
4. **Ответ:** возможны различные варианты решений
Решение: например



5. **Ответ:** 12 см.
Решение: Пусть x – длина зеленого прямоугольника, тогда (x-1) – длина синего прямоугольника, найдем длину выпирающей справа части зеленого прямоугольника, таким образом длина желтого равна 18-3-3=12 см.



6 класс

1. **Ответ:** возможны различные варианты**,** например минимальное значение равно 7, а максимальное 44800.
   Решение: В результате расстановки скобок данное выражение можно будет представить в виде дроби, где некоторые из данных чисел попадут в числитель, а другие – в знаменатель. Очевидно, при любой расстановке скобок число 10 попадет только в числитель, а 9 – только в знаменатель. Для того, чтобы значение выражения было целым, после расстановки скобок и записи полученного выражения в виде обыкновенной дроби число 7 должно оказаться в числителе. Следовательно, значение данного выражения – не меньше, чем 7. Это достигается, например, так:
   10: 9 : (8 : 7 : (6 : (5 : 4 : (3 : 2 : 1)))) = (10·7·6·4·3) : (9·8·5·2·1) = 7
   10 : (9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1) = 44800.
2. **Ответ: 14 км/ч.**
   Решение: Пусть x км/ч — скорость первого бегуна, тогда x+6 км/ч — скорость второго бегуна. Из условия известно, что второй бегун пробежал круг за 3/4 часа, при этом через час после старта первому бегуну оставался 1 км до окончания первого круга, составим уравнение:
   $$\frac{3}{4}(x+6)-1\cdot x=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x=-\frac{7}{2} \Leftrightarrow x=14.$$
   Таким образом, скорость первого бегуна равна 14 км/ч.
3. **Ответ: 15 часов, Очир - 52,5, Батыр - 420/13, Арслан - 60.**
   Решение: Составим таблицу (матрицу)

	работа	**производительность**	**время**
О+Б	1	1/20	20
Б+А	1	1/21	21
А+О	1	1/28	28
О+Б+А	1	(1/20+1/21+1/28):2	?

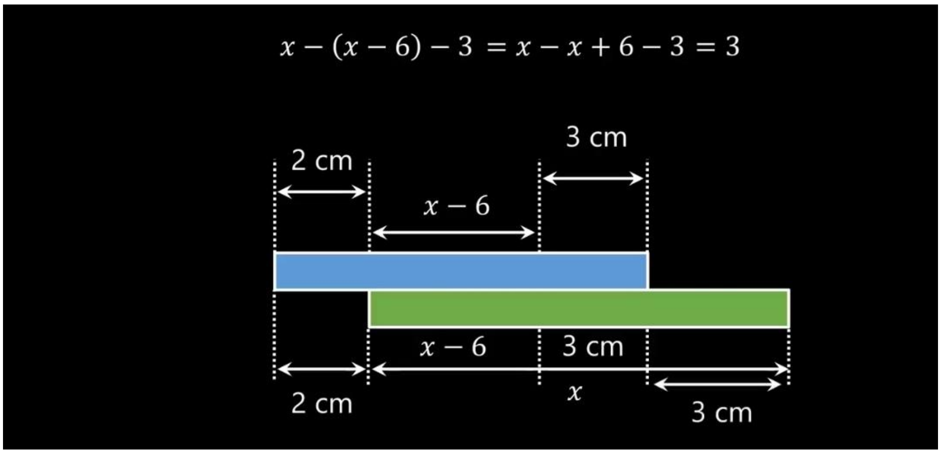
   Общая производительность Очира, Батыра и Арслана равна 1/15. Тогда мальчики покрасят забор, работая втроем, за 15 часов, Очир – 52,5 часа, Арслан– 60 часов, Батыр- 420/13 часа.
4. **Ответ:** на рисунке.
   Решение: Пусть в пустой клетке верхней строки стоит число x, тогда сумма чисел в этой строке равна 6 + x. Для того, чтобы сумма чисел первого столбца была такой же, в пустой клетке этого столбца должно стоять число x + 2. Рассматривая диагональ от левой нижней клетки до правой верхней и рассуждая аналогично, получим, что в центральной клетке должно стоять число x – 2. Тогда справа от него стоит число 6 – x, а под ним – число 8 – x (рис. слева). Для того, чтобы суммы чисел третьей строки и третьего столбца были равны 6 + x, в правой нижней клетке должно стоять число 2x – 5. С другой стороны, там должно стоять число 7, чтобы сумма чисел во второй диагонали была такой же. Значит, 2x – 5 = 7, откуда x = 6. Следовательно, решение единственное.

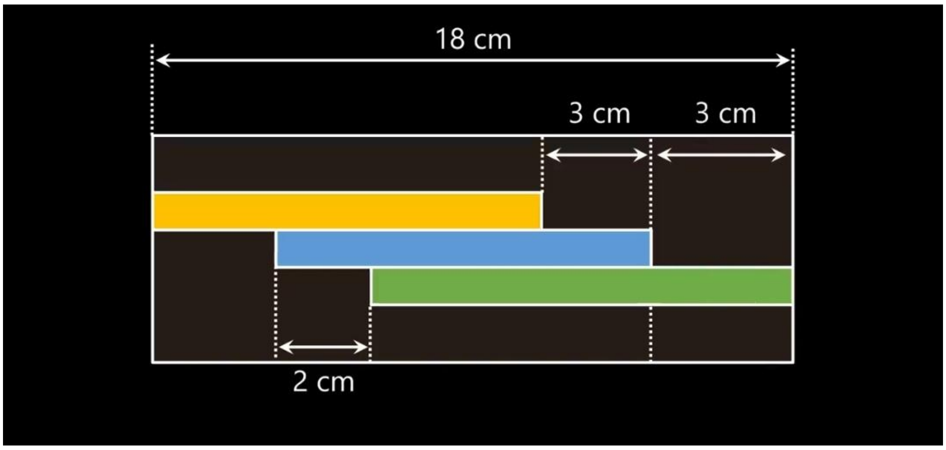
1	x	5
$x+2$	$x-2$	$6-x$
3	$8-x$	$2x-5$

1	6	5
8	4	0
3	2	7

5. **Ответ:** 12 см.

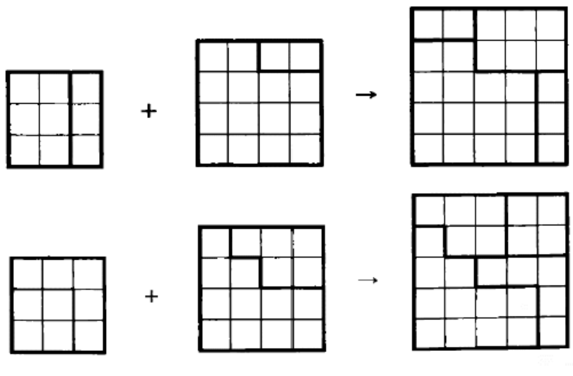
Решение: Пусть x – длина зеленого прямоугольника, тогда (x-1) – длина синего прямоугольника, найдем длину выпирающей части зеленого прямоугольника, таким образом длина желтого равна 18-3-3=12 см.





7 класс

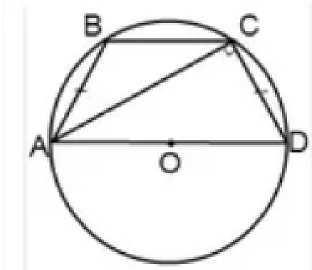
1. **Ответ:** возможны различные варианты решений.
   Решение: 1-(2-3)-4- (5-6)-(7-8) = 0.
2. **Ответ: 14.** Решение:
   Пусть x км/ч — скорость первого бегуна, тогда $x+6$ км/ч — скорость второго бегуна. Из условия известно, что второй бегун пробежал круг за $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ часа, при этом через час после старта первому бегуну оставался 1 км до окончания первого круга, составим уравнение: $\frac{3}{4}(x+6)-1\cdot x=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x=-\frac{7}{2} \Leftrightarrow x=14.$
   Таким образом, скорость первого бегуна равна 14 км/ч.
3. **Ответ: 8.** Решение. Пусть x — число косцов в артели, а y — размер участка, скашиваемого одним косцом в один день.
   Площадь большого луга: xy/2 + xy/4 = 3xy/4.
   Площадь малого луга: y + xy/4 = (xy + 4y)/4.
   По условию первый луг больше второго в 2 раза, значит: 3xy/4 : (xy + 4y)/4 = 2 или 3xy/(xy + 4y) = 2.
   После сокращения на y получаем: 3x/(x + 4) = 2.
   Решаем уравнение: 3x = 2x + 8, x = 8.
4. **Ответ: 225 или 3969 клеток**. Решение: Задача сводится к решению в натуральных числах уравнения $x^2 - y^2 = 125$, которое можно переписать в виде $(x - y)\cdot(x + y) = 125$, оба числа $x - y$ и $x + y$ нечётны. Число 125 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел следующими способами 1×125 и 5×25. Решив системы получим, что первоначальный лист мог содержать 225 или 3969 клеток
5. **Ответ:** возможны различные варианты решений.
   Решение: на рисунке.



8 класс

1. **Ответ: 256.** Решение:$2^x = x^{32}$, возведем в степень 1/x и получим, что $2 = x^{\frac{32}{x}}$ возведем в степень 1/32 и получим, что $2^{\frac{1}{32}} = x^{\frac{1}{x}}$, после преобразований показателей степени 2 получим $256^{\frac{1}{256}} = x^{\frac{1}{x}}$, тогда x=256. Построив графики функций можно понять, что существуют еще два других действительных корня и они примерно равны $x_2 \approx -0{,}98$ и $x_3 \approx 1{,}02$.
2. **Ответ: 24 ч.** Решение. Обозначим расстояние между двумя пристанями как S км. В таком случае, скорость катера по течению реки составит: $V_{\text{по теч.}} = \frac{S}{4}$ км/ч, а его скорость в противоположном направлении: $V_{\text{прот. теч.}} = \frac{S}{6}$ км/ч . Разница скоростей : $\frac{S}{4} - \frac{S}{6} = \frac{S}{12}$ Тогда скорость течения реки равна $\frac{V_{\text{по теч.}} - V_{\text{прот.теч.}}}{2}$ и составит: $\frac{S}{12} : 2 = \frac{S}{24}$ км/ч. Поскольку скорость течения является скоростью плота, значит, на путь между А и В ему понадобится : $t_{\text{плота}} = s : \frac{s}{24} = 24$ч.
3. **Ответ: за 365 дней.** Решение: 37 слонов за пять дней выпивают столько же, сколько 37·5 = 185 слонов за один день. Разница в два слона объясняется тем, что за четыре лишних дня из ключей "натекает" столько воды, сколько два слона выпивают за день. Таким образом, ключи восполняют за день половину дневной порции слона. А в озере (без ключей) 182,5 дневных порций слона. Один слон половину дня пьет воду "из озера", а половину – "из ключей". Поэтому ему понадобится 182,5·2 = 365 дней.
4. **Ответ: 5 см.** Решение. Пусть AO = x BC = y, CH-высота $CH=\frac{s}{l}=\frac{32}{8}=4$

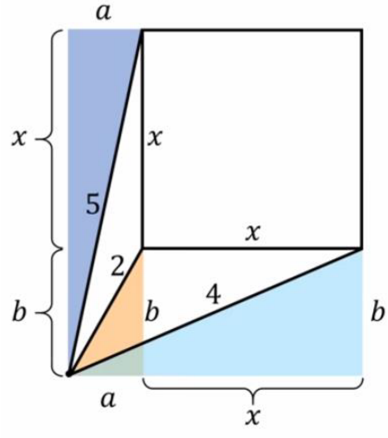
   По свойству средней линии $\frac{AD+BC}{2}=x+\frac{y}{2}=8$

   $DH=\frac{AD-BC}{2}=x-\frac{y}{2}$ AH=AD—DH=2x-($x-\frac{y}{2}$)=$x+\frac{y}{2}$=8

   $\triangle ACD$, $\angle C=90$ $CH^2=AD\cdot DH$

   $\left(x-\frac{y}{2}\right)8=16$ $x-\frac{y}{2}=2$ и $x+\frac{y}{2}$=8 получаем x=5
5. **Ответ: Ответ:** $\frac{41-\sqrt{511}}{2}$. Решение. Пусть сторона квадрата равна x. Достроим до прямоугольных треугольников.



$a^2 + b^2 = 2^2 = 4$

$(a + x)^2 + b^2 = 4^2 = 16$

$a^2 + (b + x)^2 = 5^2 = 25$

Составим систему уравнений и решим её

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (a + x)^2 + b^2 = 16 \\ a^2 + (b + x)^2 = 25 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{41 - \sqrt{511}}{2}$$

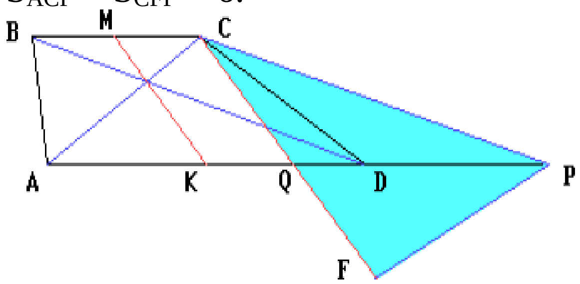
9 класс

1. **Ответ: 27.** Решение: $3^x = x^9$, возведем в степень 1/x и получим, что $3 = x^{\frac{9}{x}}$ возведем в степень 1/32 и получим, что $3^{\frac{1}{9}} = x^{\frac{1}{x}}$, после преобразований показателей степени 3 получим $27^{\frac{1}{27}} = x^{\frac{1}{x}}$, тогда x =27. Построив графики функций можно понять, что существует еще один другой действительный корень и он примерно равен $x_2 \approx 1{,}15$
2. **Ответ: 6 км/ч.** Решение: Частота встреч обратно пропорциональна скорости отца относительно сына. Поэтому условие означает, что сумма *S* скоростей отца и сына в 5 раз больше разности *R* этих скоростей. Разделив удвоенную скорость отца *S* + *R* на удвоенную скорость сына *S* – *R* получим отношение их скоростей равно 1,5. Значит скорость отца 6 км/ч.
3. **Ответ: 20 коров.** Решение: Пусть корова съедает в день 1 порцию травы. За 60 – 24 = 36 дней на лугу выросло 30·60 – 70·24 = 120 порций. Значит, помимо съеденных за 60 дней 30 коровами 1800 порций за добавочные 96 – 60 = 36 дней вырастет еще 120 порций. Всего 1920. За 96 дней их съедят 1920 : 96 = 20 коров.
4. **Ответ: 6 см^2**. Пусть M и K — середины оснований BC и AD трапеции ABCD. Через вершину C меньшего основания BC (AC =3, BD =5) проведём прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке P и прямую, параллельную MK, до пересечения с прямой AD в очке Q. Тогда AQ = AK + KQ = AK + MC = AD/2 +BC/2 == (AD + BC)/2 = (AD + DP)/2.

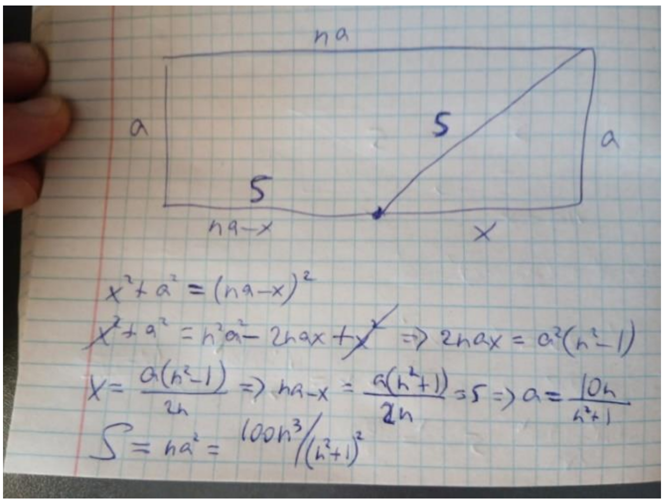
   Поэтому CQ — медиана треугольника ACP, CQ = MK = 2, AC = 3, CP = BD = 5, $S_{ABCD} = S_{ACP}$.

   На продолжении медианы CQ за точку Q отложим отрезок QF, равный CQ. Стороны треугольника CFP равны: CF = 2CQ = 4, CP = BD = 5, FP = AC = 3.

   Этот треугольник прямоугольный ($CP^2 = CF^2 + PF^2$). Поэтому SCFP = CF . PF/2 = 6. Следовательно, $S_{ABCD} = S_{ACP} = S_{CFP} = 6$.



5. **Ответ: 32.** Решение: S(2)=32



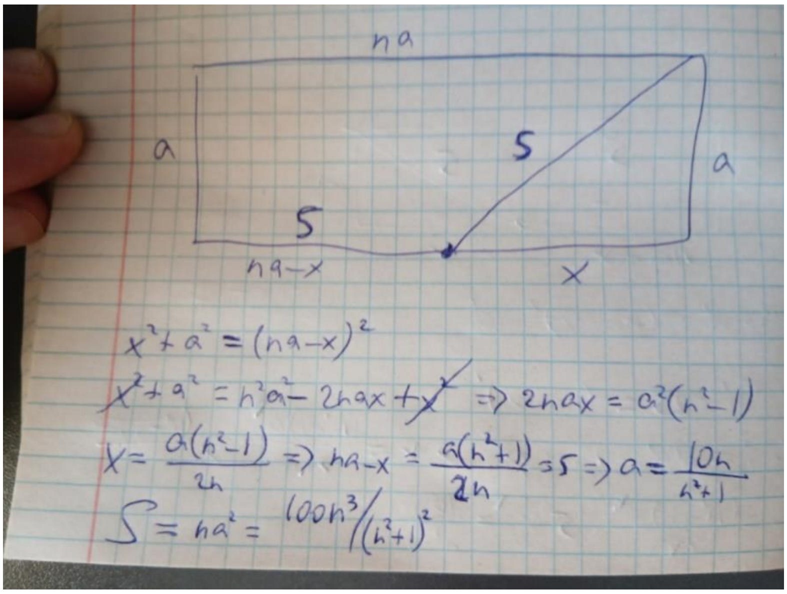
10 класс

1. **Ответ:** 1, 2 и 3. Решение: Наименьший угол треугольника не превосходит 60°, поэтому его тангенс может равняться только 1. $(\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} < 2)$.

   Значит, сумма двух оставшихся углов равна 135°.

   Пусть tg α = m, tg β = n. Тогда $\dfrac{m+n}{1-mn} = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$,

   то есть m + n = mn – 1. Записав это уравнение в виде (m – 1)(n – 1) = 2, видим, что один из множителей равен 1, а второй 2.
2. **Ответ: 9 м/с и 8 м/с.** Решение. Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с (x > y). Тогда 10(x + y) =170 и 170(x – y) =170. Отсюда находим: x = 9 м/с и y = 8 м/с.
3. **Ответ: 44.** Решение.
   Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$. Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел делится на 4. По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.
4. **Ответ: 27. Решение:** S(3)=27



5. **Ответ:** $\sqrt{2}$

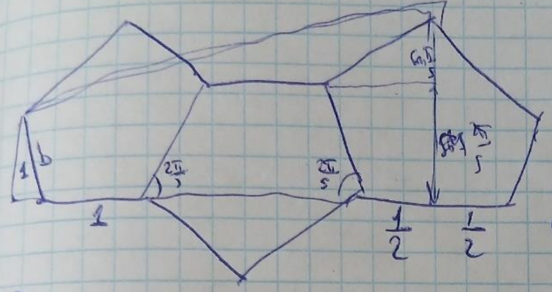
   Решение: методом объемов получим, что

   $V_{BDC_1} = \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{1}{3} S_{BDC_1} \cdot h$, $\dfrac{a^3}{6} = \dfrac{1}{3} \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$, $h = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$,

   где h-это расстояние от C до плоскости сечения, проходящей через вершины B, D и C1.

11 класс

1. **Ответ:** 45. Решение: Воспользуемся tg α + tg (α + 60°) + tg (α – 60°) = 3 tg 3α.
Из него следует, что tg 1° + tg 61° + tg 121° = tg 1° + tg(1° + 60°) + tg(1° – 60°) = 3 tg 3°, tg 5° + tg 65° + tg 125° = 3 tg 15°, и т. д., поэтому вся сумма равна 3(tg 3° + tg 15° + ... + tg 171°).
Аналогично разбив полученную сумму на "тройки", получим, что она равна
9(tg 9° + tg 45° + tg 81° + tg 117° + tg 153°) = 9 + 9(tg 9° + ctg 9° – ctg 27° – tg 27°), после чего остается найти сумму
tg 9° + ctg 9° – ctg 27° – tg 27° =
$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{4\sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 4\,.$$
Тогда 9+(tg 9° + ctg 9° – ctg 27° – tg 27°)=45.
2. Ответ**: 25 км/ч.** Решение: Пусть скорость третьего велосипедиста равна v км/ч, а t ч— момент времени, когда он догнал второго велосипедиста. Начало отсчёта времени — момент, когда первый велосипедист начал движение. Тогда к моменту времени t, когда третий велосипедист догонит второго, второй велосипедист проедет расстояние $15(t-1)$ км, а третий — расстояние $v(t-2)$ км. Аналогично: к моменту времени $t+9$, когда третий велосипедист догонит первого, первый велосипедист проедет $21(t+9)$ км, а третий, поскольку он был в пути на два часа меньше, проедет $v(t+7)$ км. Составим систему уравнений:
$$\begin{cases} 15(t-1) = v(t-2), \\ 21(t+9) = v(t+7). \end{cases}$$
Умножим первое уравнение на $t+7$, а второе — на $t-2$ и вычтем первое уравнение из второго:
$$21(t^2+7t-18) - 15(t^2+6t-7) = 0 \Leftrightarrow 2t^2+19t-91 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -13, \\ t = 3,5. \end{array}\right.$$
По условию задачи подходит только положительный корень, то есть $t = 3,5.$ Подставляя t во второе уравнение, найдём искомую скорость:
$$21 \cdot 12,5 = v \cdot 10,5 \Leftrightarrow v = 25.$$
3. **Ответ: не более 17.** Решение:
Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot \text{m} = -3(k + l + m)$. Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.
Подставим $k + l + m = 44$ в правую часть равенства $4k - 8l = -3(k + l + m)$, откуда $k = 2l - 33$. Так как $k + l \le 44$, получаем: $3l - 33 \le 44$; $3l \le 77$; $l \le 25$; $k = 2l - 33 \le 17$, то есть положительных чисел не более 17.
4. Доказательство:



$$c^2 = \frac{30+10\sqrt{5}}{4} = \frac{15+5\sqrt{5}}{2}$$

$$c = 1 + 1 + \left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5}\right) = 3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2{,}5 + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

$$a^2 = \left(\frac{4+\sqrt{5}}{2} + \cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{4+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \left(\ldots + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \ldots \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{94+42\sqrt{5}}{16} + \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8} = \frac{47}{8} + \frac{5}{8} + \frac{21\sqrt{5} - \sqrt{5}}{8} = \frac{52+20\sqrt{5}}{8}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{13+5\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{15+5\sqrt{5}}{2} = c^2$$

5. Ответ: 15,5. Решение.

$$\frac{1}{3}(14S + 11S + 29S + 8S) = V = \frac{1}{3}SH_1$$

$$62S = SH_1 \qquad H_1 = 62$$

$$\frac{1}{3}(rS + rS + rS + rS) = V = \frac{1}{3}SH_1$$

$$4r = H_1$$

$$r = \frac{62}{4} = \frac{31}{2} = 15{,}5$$