Муниципальный этап XVIII республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М. Эрдниева в 2025-2026 учебном году

Критерии оценивания

Олимпиадные задания являются творческими и допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

Каждая задача оценивается **целым числом** баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущенные случаи, не влияющие на логику рассуждений.
4-3	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. В том случае, когда решение делится на две равноценные части – решение одной из частей.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.
0	При обоснованных подозрениях на списывание участником из любого источника (Интернет, учебное пособие, ключи олимпиады и т.д.) член жюри имеет право указать на такие фрагменты с помощью **восклицательных знаков** на полях.

Олимпиадная работа содержит 5 олимпиадных заданий разной сложности. Важно отметить, что любое правильное (верное) решение задания оценивается в 7 баллов.

Максимальное количество набранных баллов – 35 баллов.

При оценивании олимпиадного задания на составление и решение обратной задачи необходимо учитывать наличие в записи **текста обратной задачи** и оценивать верное решение прямой задачи в 4 балла, составление текста обратной задачи – 1 балл, верное решение обратной задачи – 2 балла.

Жюри проводит проверку решений участников на схожесть (идентичность) и выносит предложения об аннулировании результатов участников, если их решения заданий **абсолютно одинаковые.**

Помимо этого, жюри муниципального этапа олимпиады должны помнить о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. **Недопустим**о снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; **недопустимо** снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются **«за старание участника»,** в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

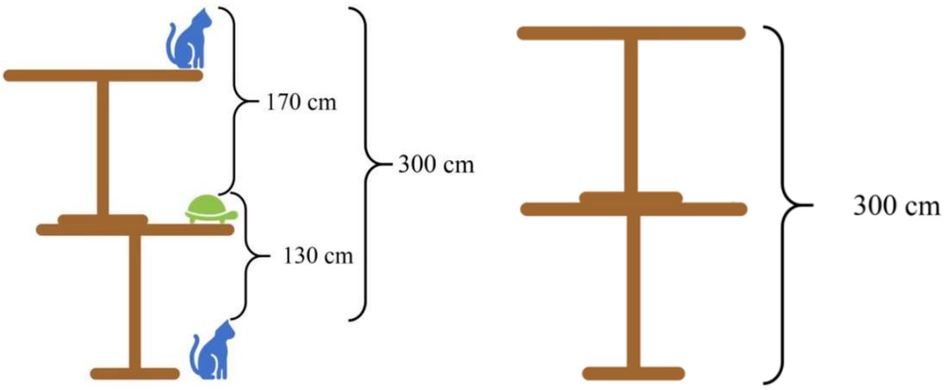
г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

4 класс

1. **Ответ**: возможны 34 различных решения, например: (5,7,2,8,3,9,1,6,4), (6,9,3,5,2,1,7,8,4) и т.д.
2. **Ответ: 3000.** Решение: За 100% принимается та величина, с которой мы сравниваем. Цена была повышена на 20% по сравнению с чем? с прежней ценой. Значит, прежняя цена это 100%, новая цена 100%+20% = 120%.
   1) 3600:120=30 (руб.) -1%
   2) 30*100=3000 (руб.) (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: через 2 года.**
   Выясним, сколько лет Очиру: Б + О = 20, Б=4·О, тогда О = 4
   По условию известно, что Батыр старше Очира в 4 раза, то есть Батру сейчас: 4*4 = 16 лет, а Очиру 4 года. Составим таблицу и увидим, что это произойдет через 2 года.

Имя	**Возраст**	**через 2 года**	**через 4 года**	**через 5 лет**	**через 8 лет**
Батыр	16	**18**	20	21	24
Очир	4	**6**	8	9	12

4. **Ответ.** Жёлтых шариков на 8 больше. Решение. Всего игрушек 20 + 26 = 46. Раз 37 из них шарики, то оставшиеся 46 − 37 = 9 кубики. Все эти 9 кубиков по условию жёлтые. А оставшиеся 26−9=17 жёлтых игрушек это жёлтые шарики. Значит, жёлтых шариков больше, чем жёлтых кубиков, на 17 − 9 = 8.
5. **Ответ: 150 см.** 1 способ. Кот+ Стол- Черепаха = 170, Черепаха+Стол-Кот = 130. Тогда высота 2 столов 300 см. 2 способ. Визуальное решение на рисунке. 300: 2=150.

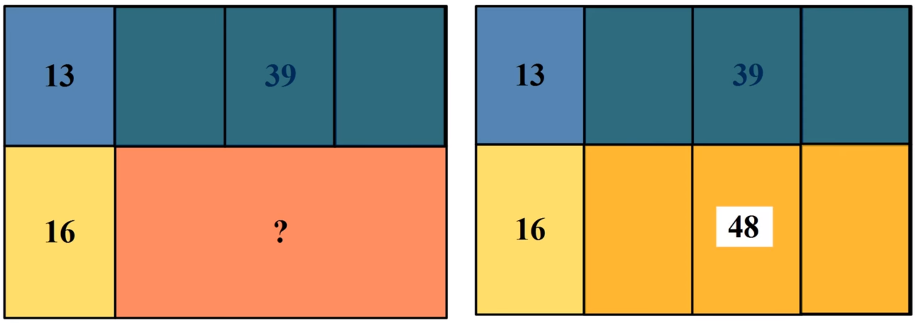


5 класс

1. **Ответ:** возможны 34 различные решения, например: (5,7,2,8,3,9,1,6,4), (6,9,3,5,2,1,7,8,4) и т.д.
2. **Ответ: 2000.** Решение: За 100% принимается та величина, с которой мы сравниваем. Цена была повышена на 20% по сравнению с чем? с прежней ценой. Значит, прежняя цена это 100%, новая цена 100%+20% = 120%, после очередного повышения 120%+120%*0,2=144%.
   1) 2880:144=20 (руб.) -1%
   2) 20*100=2000 (руб.) (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: через 8 лет.**
   Решим уравнение и выясним, сколько лет Очиру: x + 4x = 20, 5x = 20, x = 4
   По условию известно, что Батыр старше Очира в 4 раза, то есть Батру сейчас: 4*4 = 16 лет, а Очиру 4 года. Составим таблицу и увидим, что это произойдет через 8 лет.

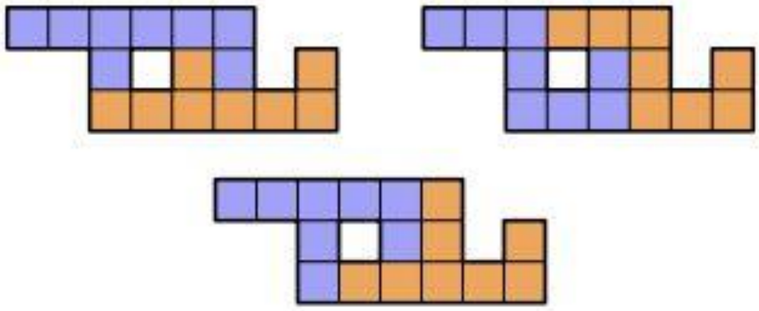
Имя	**Возраст**	**через 2 года**	**через 4 года**	**через 5 лет**	**через 8 лет**
Батыр	16	18	20	21	**24**
очир	4	6	8	9	**12**

4. **Ответ: 45.** Число, которое в 5 раз больше суммы своих цифр, должно делиться на 5. Значит, оно оканчивается на 0 или на 5. Однако на 0 оно оканчиваться не может, ибо в этом случае будет в 10 раз больше суммы своих цифр. Итак, искомое число можно записать в виде 10*а + 5. Сумма цифр этого числа равна а + 5, тогда 10*а + 5 =5 *(а+5) подбором получим, что а = 4, искомое же число 45.
5. **Ответ: 48.** Верхний правый прямоугольник разрежем на 3 равные части и получим 4 равных прямоугольника. Продолжим линии вниз и разрежем нижний правый прямоугольник на 3 равные части. Тогда площадь четвертого прямоугольника равна 16*3=48.

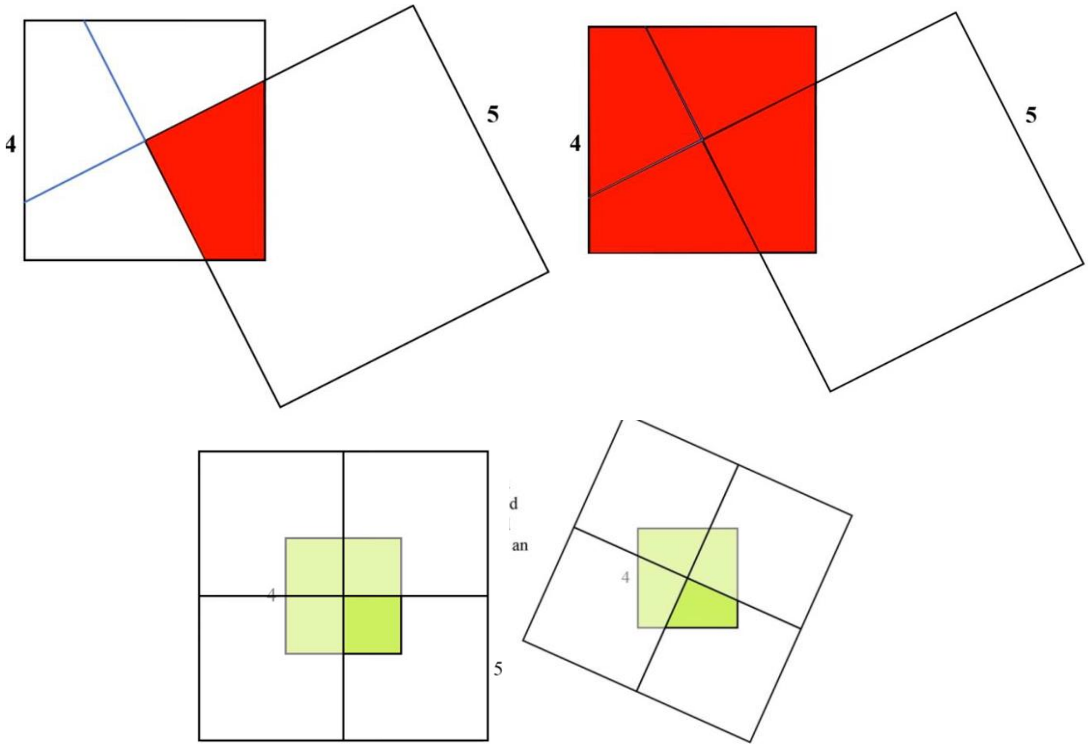


6 класс

1. **Ответ:** возможны различные решения, например:



2. **Ответ: в 6 раз.** Сначала лип было в 1,5 раза меньше, чем клёнов, а летом стало в 4 раза больше. При этом количество клёнов не изменилось. Значит, лип стало в $1{,}5 \cdot 4 = 6$ раз больше. К концу года отношение числа лип к количеству всех деревьев стало таким же, как было в начале. Но осенью количество лип не менялось, значит, количество всех деревьев (по сравнению с исходным) увеличилось в шесть раз. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: 3, 4, 5.** Решение: Обозначим эти числа за n-1, n, n+1.
   Составим уравнение $(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$, решив уравнение получим $n_1=4$ и $n_2=0$. Так как n-натуральное, то единственное решение n=4.
4. **Ответ: 1.** Решение: Найдем, с какого момента в десятичную запись данного числа начнут входить трехзначные числа: 2025 - 9 * 1 - 90 * 2 = 1836, 1836 : 3 = 612, то есть на 2025-м месте стоит третья цифра 612-го по счету трехзначного числа. То есть, числа от 100 до 711 дают ровно 1836 цифр. Это число 711, поэтому искомая цифра 1.
5. **Ответ**: **4.** Решение: Проведем дополнительное построение. Квадрат разбит на 4 равные части. Тогда площадь фигуры равна 16:4=4.



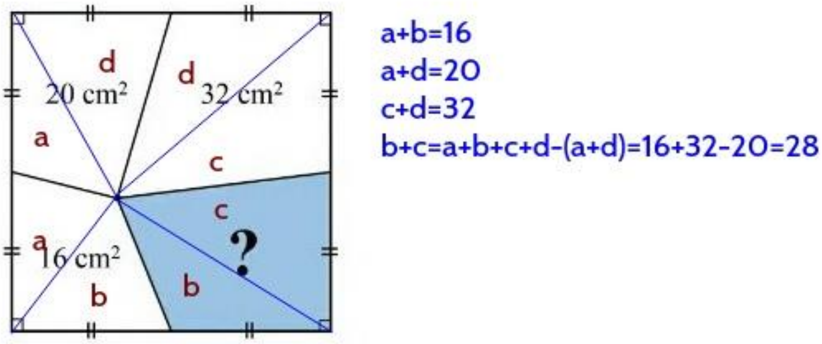
7 класс

1. **Ответ:** возможны различные решения, например

1	**15**
2	**-3**

-15	**-1**
18	**3**

2. **Ответ: 36%.** Обозначим объем аквариума за V, первоначальный объем воды за x. Уравнение 0,6 x+1,6(V-x) =V, x=0,6V. Тогда в конце месяца вода составляет 0,36V, что составляет 36%. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: 6, 8, 10.** Решение: Обозначим эти числа за 2n-2, 2n, 2n+2. Составим уравнение $(2n-2)^2 + 4n^2 = (2n+2)^2$, решив уравнение получим $n_1=4$ и $n_2=0$. Так как n-натуральное, то единственное решение n=4.
4. **Ответ: 1.** Решение: Найдем, с какого момента в десятичную запись данного числа начнут входить трехзначные числа: 2025 - 9 * 1 - 90 * 2 = 1836, 1836 : 3 = 612, то есть на 2025-м месте стоит третья цифра 612-го по счету трехзначного числа. То есть, числа от 100 до 711 дают ровно 1836 цифр. Это число 711, поэтому искомая цифра 1.
5. **Ответ: 28 см^2.** Решение: Соединим точку с вершинами. По свойству медианы, образовавшиеся треугольники равновелики. Введем обозначение и найдем площадь 4-й части.



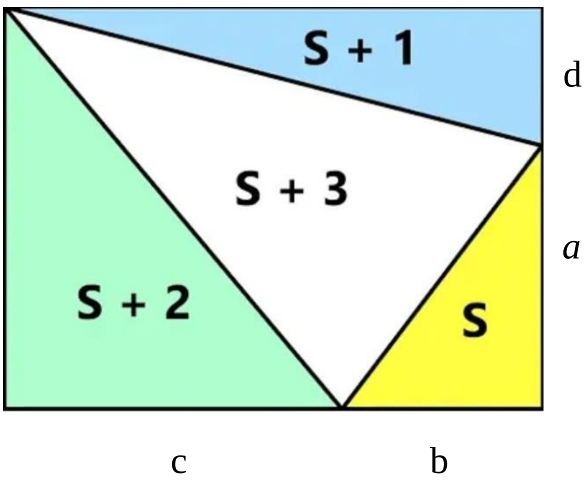
8 класс

1. **Ответ:** возможны различные решения. 1 способ -3 балла, 2 способа-7 баллов.

1	**15**
2	**-3**

-15	**-1**
18	**3**

2. **Ответ: 1,5 часа**. Решение: Пусть 2S – длина пути, v – скорость автомобиля на первой половине пути. Тогда, скорость автомобиля на второй половине пути равна $0{,}5\cdot v$ и, поскольку проигрыш во времени происходит только на второй половине пути, то $S/0{,}5v=S/v+1/2$. Зная, что $S/v=t$ находим $t=0{,}5$ часа. Следовательно, автомобиль был в пути $0{,}5 + 1 = 1{,}5$ часа. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: 3,4, 5.** Решение: Обозначим эти числа за $n-1$, n, $n+1$.
   Составим уравнение $(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$, решив уравнение получим $n_1=4$ и $n_2=0$. Так как n-натуральное, то единственное решение $n=4$.
4. **Ответ: 7.** Решение: Найдем, с какого момента в десятичную запись данного числа начнут входить трехзначные числа: $2026 - 9\cdot 1 - 90 \cdot 2 = 1837$, $1837 : 3 = 612$ (ост.1), то есть на 2026-м месте стоит вторая цифра 613-го по счету трехзначного числа. То есть, числа от 100 до 711 дают ровно 1836 цифр. Это число 712, поэтому искомая цифра 7.
5. **Ответ: $\sqrt{2}$.** Решение. Обозначим катеты треугольников a, b, c, d, тогдла ширина равна a+d, длина c+b. Тогда площади треугольников равны $S=ab/2$, $S+2=c(a+d)/2$, $S+1=d(c+b)/2$, а площадь всего прямоугольника равна $4S+6=(a+d)(c+b)$.
   Получим, что $db=2$ (*), $ac=4$ (**), подставив в формулы получим что $cd=ab=2S$ (***).
   Переменожим (*) и (**) и получим $abcd=8$, подставим (***) $4S^2=8$, тогда $S=\sqrt{2}$.



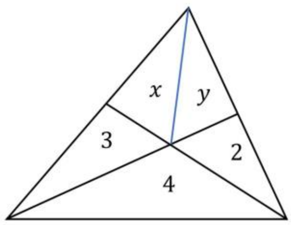
9 класс

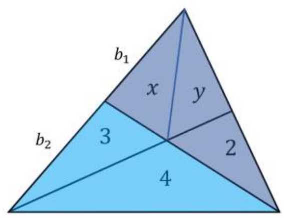
1. **Ответ:** возможны различные решения. 1 способ -3 балла, 2 способа-7 баллов.

1	**15**
2	**-3**

-15	**-1**
18	**3**

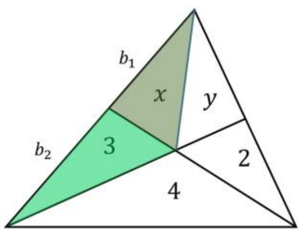
2. **Ответ: 2,5 часа**. Решение: Пусть 2S – длина пути, v – скорость автомобиля на первой половине пути. Тогда, скорость автомобиля на второй половине пути равна 1,5·v и, поскольку выигрыш во времени происходит только на второй половине пути, то S/1,5v=S/v-1/2; Зная, что S/v=t находим t=1,5 часа. Следовательно, автомобиль был в пути 1,5 + 1 = 2,5 часа. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25.** Приведено 1 верное решение -3 балла, 2 решения -5 баллов, 3 решения-7 баллов.
   Решение: Составим систему уравнений $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 = b + c$. Решив её, получим b = c-1. Так как c-натуральное, то существует 3 решения c = 5, 13, 25.
4. **Ответ: 7.** Решение: Найдем, с какого момента в десятичную запись данного числа начнут входить трехзначные числа: 2026 - 9·1 – 90·2 = 1837, 1837 : 3 = 612 (ост.1), то есть на 2026-м месте стоит вторая цифра 613-го по счету трехзначного числа. То есть, числа от 100 до 711 дают ровно 1836 цифр. Это число 712, поэтому искомая цифра 7.
5. **Ответ: 7,8.** Решение: Проведем отрезок и отметим площади треугольников через x и y. Рассмотрим два треугольника, имеющие общую высоту с площадью x+y+2 и 7. Отношение площадей этих треугольников равно отношению оснований b_1 и b_2. Аналогично рассмотрим два треугольника с площадью x и 3.

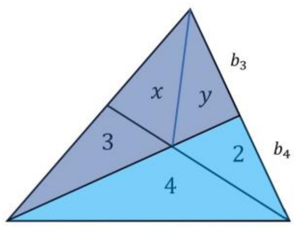




$$\frac{x+y+2}{3+4} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{x+y+2}{7} = \frac{b_1}{b_2}$$





$$\frac{x+y+2}{7} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{y+x+3}{6} = \frac{b_3}{b_4} = \frac{y}{2}$$

Получим систему из двух уравнений, решив котрую найдем площадь четвертой части:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+2}{7} = \dfrac{x}{3} \\ \dfrac{x+y+3}{6} = \dfrac{y}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 3(x+y+2) = 7x \\ x+y+3 = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{21}{5} \\ y = \dfrac{18}{5} \end{cases} \quad x+y = \frac{39}{5} = 7{,}8$$

10 класс

1. **Ответ: Да**. Решение: A=B·C, B=111 111 111 делится на 9, C=000 000 001 000 000 001 000 000 001 ... 000 000 001 - девять блоков [000 000 001] => девять единиц в десятичной записи числа => C делится на 9 => A делится на 81.
2. **Ответ: 9.** Решение: Пусть масса первого сплава m кг, а масса второго m+3 кг, масса третьего сплава 2m+3 кг. Первый сплав содержит 10% меди, второй − 40% меди, третий сплав − 30% меди. Тогда: 0,1m+0,4(m+3) = 0,3(2m+3); m=3 кг. Таким образом, масса первого сплава равна 3 кг, тогда масса третьего сплава равна 9 кг (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: 0.** Решение:

$$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{4xy}{x^2+y^2}=4,\ x-y=?$$

$$xy<0\ \Rightarrow\ \frac{x^2+y^2}{xy}<0,\ \frac{4xy}{x^2+y^2}<0\ \Rightarrow\ \frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{4xy}{x^2+y^2}<0\ \Rightarrow\ \emptyset$$

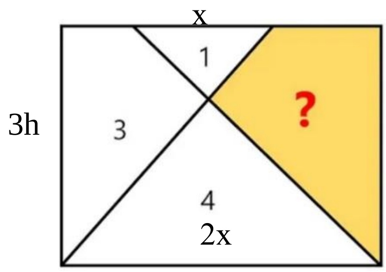
$$\Rightarrow\ xy>0\ \Rightarrow\ sign\,(x)=sign\,(y)$$

$$4=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{4xy}{x^2+y^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy}\cdot\frac{4xy}{x^2+y^2}}=2\sqrt{4}=4$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{4xy}{x^2+y^2}$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2-4x^2y^2=\left(x^2-y^2\right)^2=0\ \Rightarrow\ x=y\ \Rightarrow\ x-y=0$$

4. **Ответ: 4.** Решение: Обозначим площадь четвертой части за S. Из подобия треугольников получим, что коэффициент подобия равен 2. Обозначим основание треугольника за x, а его высоту за h, тогда основание второго треугольника равна 2x и его высота 2h. Тогда стороны прямоугольника 3h и 2x.Тогда xh=2, S+8=3h·2x=12, S=4



5. **Ответ:** $1+\sqrt{85}$. Решение: Пусть r_1- радиус основания малого конуса, а R- радиус основания большого конуса. Тогда, чтобы найти объем воды воспользуемся формулой и отношением подобных треугольников

$$\frac{r_1}{8}=\frac{R}{h}\qquad r_1=\frac{8R}{h}$$

Пусть r_2 - радиус основания малого конуса, а R- радиус основания большого конуса. Тогда, чтобы найти объем воды воспользуемся формулой и отношением подобных треугольников

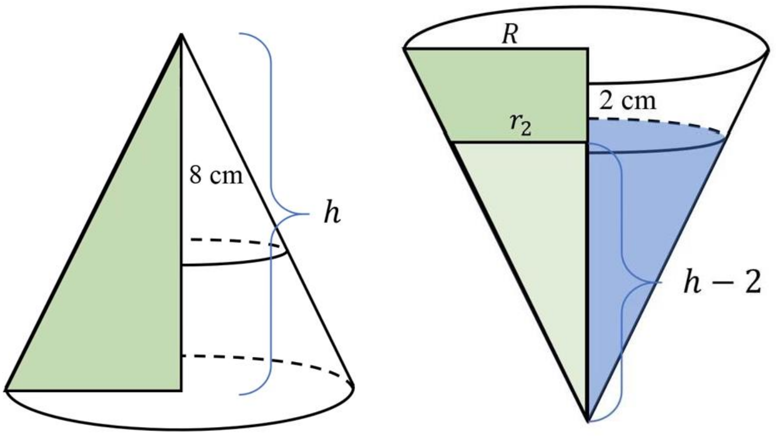
$$\frac{r_2}{h-2} = \frac{R}{h} \quad r_2 = \frac{(h-2)R}{h}$$

Объем воды вычислим по формуле для конуса слева

$$V = \frac{\pi}{3}R^2 h - \frac{\pi}{3}\left(\frac{8R}{h}\right)^2 = \frac{\pi}{3}R^2\left(h - \frac{512}{h^2}\right)$$

Объем воды вычислим по формуле для конуса справа

$$V == \frac{\pi}{3}(r_2)^2(h-R) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h-2}{h}\right)^2 R^2(h-R) = \frac{\pi}{3}R^2\frac{(h-2)^3}{h^2}$$



Приравняем полученные формулы и получим уравнение

$$\frac{\pi}{3}R^2\left(h - \frac{512}{h^2}\right) = \frac{\pi}{3}R^2\frac{(h-2)^3}{h^2}$$

$$\cancel{h^3} - 512 = (h-2)^3 = \cancel{h^3} - 6h^2 + 12h - 8$$

$$6h^2 - 12h - 504 = 0 \implies h^2 - 2h - 84 = 0$$

$$h = 1 + \sqrt{85} \quad (\text{since } h > 0)$$

11 класс

1. **Ответ: Да**. Решение: A=111…111=B·C·D, D=25, B=111 111 111 делится на 9, C=000 000 001 000 000 001 000 000 001 ... 000 000 001 - девять блоков [000 000 001] => девять единиц в десятичной записи числа => C делится на 9 => A делится на 81.
2. **Ответ: 60.** Решение: Пусть масса 30-процентного раствора кислоты x кг, а масса 60-процентного y кг. Если смешать 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 36-процентный раствор кислоты: 0,3x+0,6y=0,36(x+y+10)

   Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты: 0,3x+0,6y|+0,5·10=0,41(x+y+10)

   Решим полученную систему уравнений: x=60, y=30.

   (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ: 0.** Решение:

$$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{4xy}{x^2+y^2}=4,\ x-y=?$$

$$xy<0\ \Rightarrow\ \frac{x^2+y^2}{xy}<0,\ \frac{4xy}{x^2+y^2}<0\ \Rightarrow\ \frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{4xy}{x^2+y^2}<0\ \Rightarrow\ \emptyset$$

$$\Rightarrow\ xy>0\ \Rightarrow\ sign\,(x)=sign\,(y)$$

$$4=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{4xy}{x^2+y^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy}\cdot\frac{4xy}{x^2+y^2}}=2\sqrt{4}=4$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{4xy}{x^2+y^2}$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2-4x^2y^2=\left(x^2-y^2\right)^2=0\ \Rightarrow\ x=y\ \Rightarrow\ x-y=0$$

4. **Ответ:68**. Решение: Обозначим угол между сторонами квадратов длины 3 и 5 через α, а стороны квадратов через x и y, используя теорему косинусов составим и сложим 2 уравнения

$$\mathrm{x}^2=9+25+2\cdot3\cdot5\cdot cos(180-\alpha)$$

$$y^2=9+25+2\cdot3\cdot5\cdot cos\alpha$$

$$\mathrm{x}^2+y^2=68$$

5. **Ответ:** $V=\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{72}}$

   Решение: Достроим данный тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда, у которого диагоналями противоположных граней являются противоположными ребрами равногранного тетраэдра.

   Пусть x,y, z –ребра этого параллелепипеда. Тогда $x^2+y^2=a^2$ (1) $z^2+y^2=b^2$ (2) $x^2+z^2=c^2$ (3).

   Так как $R=\frac{d}{2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2}{8}$.

Складывая равенства (1) и (3) и вычитая из них равенство (2) получаем $x^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$.

Аналогично находим z^2 и y^2. Так как объем тетраэдра в три раза меньше объема параллелепипеда, то

$$V = \sqrt{\frac{(xyz)^2}{9}} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{72}}$$